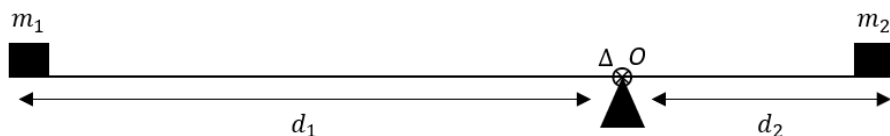


Exercice n°1 • Balançoire

cours

On considère une balançoire qui a une longueur $L = d_1 + d_2$. Elle consiste en une barre homogène de masse m , libre de tourner autour de l'axe Δ passant par le point O , considéré comme une liaison pivot parfaite. On note J_{barre} le moment d'inertie de cette barre autour de l'axe Δ .



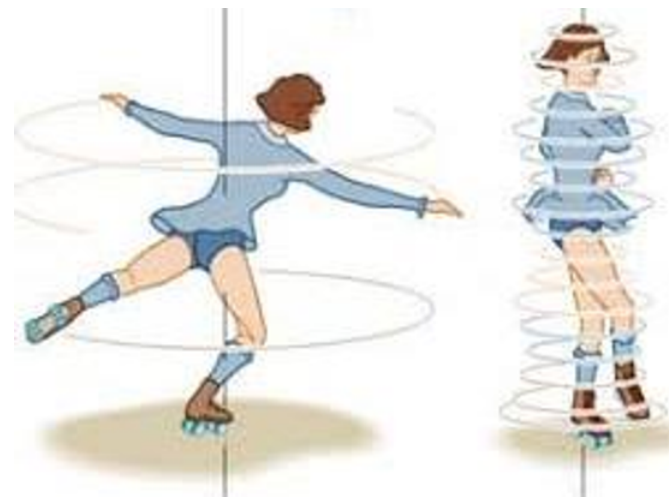
On place des masses ponctuelles m_1 et m_2 aux extrémités de la balançoire. On étudie le système {barre + masse m_1 + masse m_2 } dans le référentiel terrestre $\mathcal{R}$ supposé galiléen.

- 1) Dessiner sur le schéma les différentes forces que subit le système.
- 2) Appliquer le théorème du moment d'inertie.
- 3) Établir une relation entre les différents paramètres qui traduit l'équilibre de la balançoire.
- 4) On suppose que la relation obtenue précédemment est satisfaite. On suppose que la balançoire est initialement horizontale et possède une vitesse angulaire $\omega_0 > 0$. Déterminer $\theta(t)$.
- 5) Reprendre la question précédente en considérant que la liaison pivot subit le couple de frottement solide Γ_Δ défini par : $\Gamma_\Delta = -\Gamma_0$ (avec Γ_0 une constante positive) tant que $\dot{\theta} \neq 0$ et $\Gamma_\Delta = 0$ si $\dot{\theta} = 0$.

Exercice n°2 • Patineuse

☆☆☆

En poussant sur le sol, une patineuse avec une jambe et les bras étendus arrive à tourner à une vitesse angulaire maximum de $\omega_0 = 1,0 \text{ tour} \cdot \text{s}^{-1}$. Dans cette configuration, son moment d'inertie autour de l'axe de rotation est $J_{\Delta,0} = 3,5 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$.



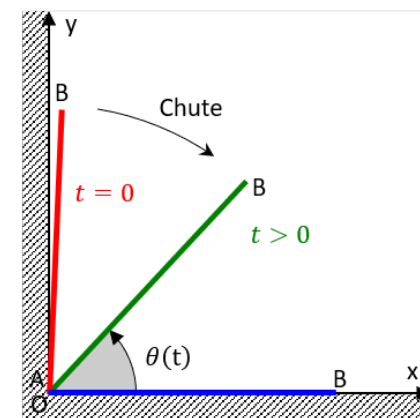
- 1) Lorsque la patineuse rapproche ses bras et se met dans une position de pirouette, son moment d'inertie autour de l'axe de rotation devient $J_{\Delta,1} = 1,0 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$. Expliquer pourquoi le moment d'inertie diminue.
- 2) On néglige toute forme de frottement. Appliquer le théorème du moment cinétique et montrer que le moment cinétique autour de l'axe de rotation se conserve.
- 3) En déduire la vitesse angulaire ω_0 de la patineuse une fois les bras repliés.

Exercice n°3 • Chute d'une échelle

☆☆☆

On considère une échelle AB de longueur R et de masse m . On note J_z son moment d'inertie par rapport à l'axe (Az) . À $t = 0$, l'échelle est abandonnée sans vitesse à la position repérée par θ_0 (proche de $\pi/2$) et se met à chuter. Pendant la chute, le point A reste immobile.

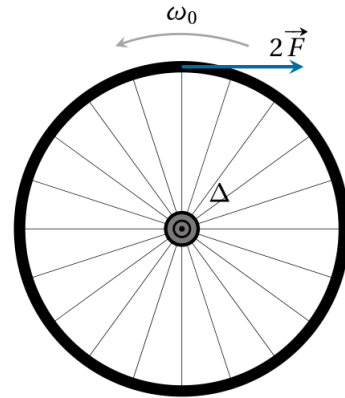
Déterminer l'équation différentielle vérifiée par $\theta(t)$.



Exercice n°4 • Freinage à vélo



On considère une roue de bicyclette à rayons de rayon $R = 33 \text{ cm}$ et de masse $m = 1,6 \text{ kg}$ dont on étudie l'arrêt de la rotation par des freins à étrier. Chacun des deux freins exerce sur la jante une force d'intensité F que l'on considérera constante tant que la roue tourne. Le vélo étant retourné sur sa selle, la roue est en rotation autour de son moyeu fixe, noté Δ . On néglige les frottements sur l'axe.



1) Quel est le modèle le plus approprié pour décrire le moment d'inertie de la roue : celui du cylindre plein ou celui du cylindre creux ?

On prendra ce modèle par la suite et on admet que $J = mR^2$.

2) Déterminer le moment résultant des forces de frottement par rapport à l'axe Δ .

3) En déduire l'équation différentielle d'évolution de l'angle θ autour de l'axe Δ .

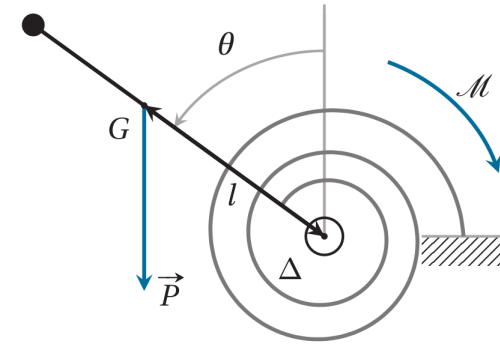
4) On admet qu'à $t = 0$, $\theta = 0$ et $\omega_0 = 17 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$ (la vitesse angulaire). En déduire les expressions de $\omega(t)$ et de $\theta(t)$.

5) Déterminer l'intensité F de la force nécessaire pour arrêter la roue en un seul tour. Cette force serait-elle supérieure ou inférieure pour une roue dite « lenticulaire » de même masse (il s'agit d'un disque où la répartition de masse est uniforme, dont l'objectif est d'optimiser au maximum l'aérodynamisme puisque l'air ne peut plus s'engouffrer dans la roue).

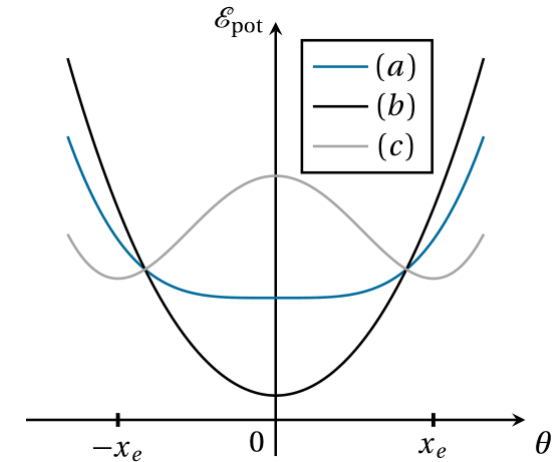
Exercice n°5 • Gravimètre



On étudie un gravimètre formé d'un ressort à spirale auquel est fixée rigidement une tige. Ce ressort exerce sur la tige un moment de rappel harmonique $\mathcal{M}_\Delta = -K\theta$ par rapport à l'axe Δ du ressort quand la tige a tourné d'un angle θ . On désigne par ℓ la distance du centre d'inertie de la tige à l'axe Δ horizontal fixe et par J le moment d'inertie de la tige par rapport à l'axe Δ . On néglige les frottements sur l'axe.



1) Justifier que le système est conservatif et donner l'expression d'une énergie potentielle $\mathcal{E}_p$ associée.



2) La figure ci-dessus donne l'allure de la courbe $\mathcal{E}_p(\theta)$ pour différentes valeurs du rapport $a = 2mg\ell/K$. Classer ces courbes par valeurs croissantes de a . Existe-t-il des positions d'équilibre ? Discuter leur stabilité.

3) Effectuer un développement limité de $\mathcal{E}_p$ au terme non nul d'ordre le plus bas en $\theta \ll 1 \text{ rad}$. On rappelle le développement limité de $\cos(\theta)$ à l'ordre 4 en θ :

$$\cos(\theta) = 1 - \frac{\theta^2}{2} + \frac{\theta^4}{24}$$

4) Retrouver les conclusions de la question 2.

5) Établir l'expression de la pulsation ω_0 des petites oscillations dans le cas où l'équilibre est stable. On la mettra sous la forme :

$$\omega_0 = \sqrt{\beta - \frac{mg\ell}{J}}$$

avec β une constante positive. Rappeler également l'expression de la pulsation d'un pendule pesant dont le centre d'inertie est à la distance ℓ de l'axe.

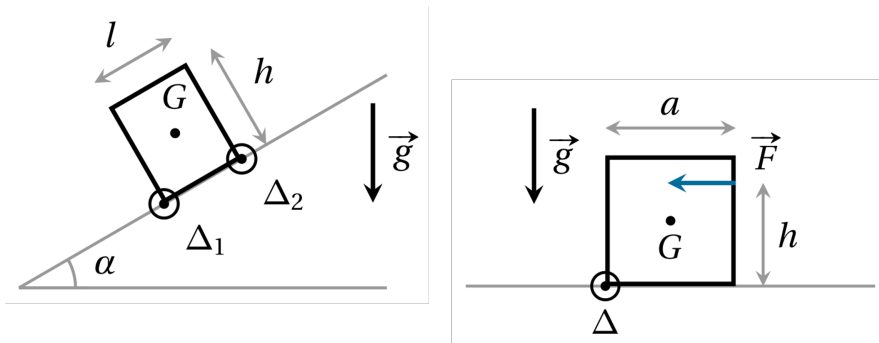
6) Calculer $\frac{1}{\omega} \frac{d\omega}{dg}$ pour le gravimètre étudié et pour un pendule pesant. En déduire que ce dispositif peut être beaucoup plus sensible qu'un pendule simple pour mesurer l'accélération de la pesanteur g .

7) Ce dispositif peut également modéliser un manège de jardin d'enfants où l'enfant se balance sur un siège fixé au bout d'un ressort à boudin. Qu'observe-t-on si un adulte essaie de se balancer ?

Exercice n°6 • Basculements d'un parallélépipède



On étudie les basculements d'un parallélépipède autour d'une arête.



On place un parallélépipède rectangle (hauteur h , largeur ℓ , centre de gravité G), noté S , sur un plan incliné d'un angle α par rapport à l'horizontale, perpendiculairement à la ligne de plus grande pente du plan (figure de gauche). On admet qu'une force de frottement du support l'empêche de glisser et on étudie son éventuel basculement autour d'une de ses arêtes, Δ_1 ou Δ_2 , alors qu'il est initialement immobile.

- 1) Déterminer les signes du moment du poids par rapport à chacun des axes.
- 2) On considère que le contact avec le support est ponctuel quand le cube est en rotation autour d'un axe Δ . Que peut-on dire du moment, par rapport à l'axe Δ , de la force de contact exercée par le support sur le cube.

3) On fait l'hypothèse que l'objet a tout juste commencé à basculer autour de l'arête Δ_2 . Montrer, en y appliquant le théorème du moment cinétique, que l'objet S recolle au support.

4) On fait l'hypothèse que l'objet a tout juste commencé à basculer autour de l'arête Δ_1 . Déterminer, en y appliquant la loi du moment cinétique, à quelle condition l'objet S continue à basculer.

Le parallélépipède est maintenant un cube d'arête a , que l'on souhaite faire avancer sur un plan horizontal et dont on note m la masse (figure de droite). On fait basculer le cube autour de son arête Δ en poussant avec une force $\vec{F}$. On admet qu'une force de frottement du support l'empêche de glisser, il ne peut que tourner autour de Δ .

5) Appliquer le théorème du moment cinétique par rapport à l'axe Δ et en déduire la force minimale à appliquer pour provoquer le basculement en fonction de la hauteur h à laquelle la force est exercée. Où faut-il pousser pour exercer un effort minimal ?

6) Déterminer le travail à fournir pour faire tourner S , d'un angle θ quelconque. En déduire le travail minimal à fournir pour que le cube bascule.

7) On peut aussi faire glisser le cube. La force de frottement $\vec{T}$ exercée par le support est constante et a pour norme μmg . Déterminer la force minimale à exercer pour faire glisser le cube.

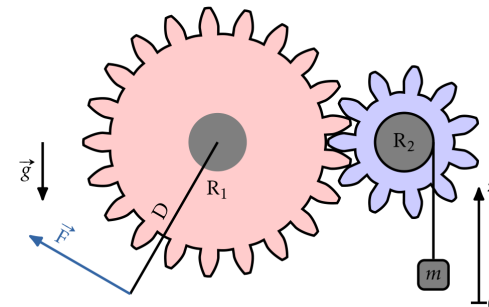
8) Exprimer le travail minimal pour faire avancer le cube d'une longueur a .

9) Conclure : dans quels cas est-il plus avantageux de faire « rouler » le cube ? Qu'en est-il pour $\mu = 0, 3$ (cas d'un objet en bois sur un sol en bois).

Exercice n°7 • Transmission de puissance



On considère le dispositif ci-dessous formé de deux engrenages d'axes parallèles. Leurs moments d'inertie (par rapport à leurs axes de symétrie de révolution parallèles) et nombres de dents sont respectivement notés J_1, J_2, N_1 et N_2 .



On exerce une force $\vec{F}$ (orthoradiale sur un levier de longueur D) sur le premier engrenage pour hisser une masse m attachée à un fil sans masse qui s'enroule sur l'axe (de rayon R_2) du deuxième engrenage.

À l'état initial la masse est immobile en $z = 0$.

1) Établir une relation entre les vitesses angulaires des deux engrenages faisant intervenir leurs nombres de dents.

2) En déduire l'équation différentielle vérifiée par l'altitude z de la masse m .

On étudie dans la suite un régime permanent dans lequel la masse monte à la vitesse constante v_0 .

3) Déterminer l'intensité de la force, notée F_0 en fonction de m, g, R_1 et D .

4) Comparer la puissance fournie par l'opérateur à la puissance du poids de la masse m .

5) L'opérateur est capable de développer une force maximale de $F_{max} = 500$ N. Est-il capable de soulever directement (sans les engrenages) une masse $m = 400$ kg ? On dispose de $D = 50$ cm. Comment choisir R_1 afin qu'il puisse soulever la masse à l'aide de l'engrenage ?

Éléments de correction

① 2) $J_{sys} \ddot{\theta}(t) = -d_1 m_1 g + d_2 m_2 g - \frac{d_1 - d_2}{2} mg$. 3) $-d_1 m_1 + d_2 m_2 - \frac{d_1 - d_2}{2} m = 0$. 4) $\theta(t) = \omega_0 t$. 5) $\theta(t) = \omega_0 t - \frac{\Gamma_0}{2J_{sys}} t^2$. ② 1)

$J_{\Delta} \propto m_{tot} \times (\text{distance à l'axe})^2$. 2) $\frac{dL_{\Delta}}{dt} = 0$. 3) $\omega_1 = \frac{J_{\Delta,0}}{J_{\Delta,1}} \omega_0 = 3,5 \text{ tours} \cdot \text{s}^{-1}$.

③ $J_z \ddot{\theta} = -\frac{Rmg}{2} \cos(\theta)$. ④ 1) Creux. 2) $\mathcal{M}_{\Delta}(\vec{F}) = -FR$. 3) $J \ddot{\theta} = -2FR$.

4) $\omega(t) = \omega_0 - \frac{2FR}{J} t$ et $\theta(t) = \omega_0 t - \frac{FR}{J} t^2$. 5) $F = \frac{m\omega_0^2 R}{8\pi} = 6,0$ N. Freinage plus efficace avec une lenticulaire car J plus petit. ⑤ 1) $\mathcal{E}_p =$

$\frac{1}{2} K (\theta^2 + a \cos(\theta))$. 2) $a_{(b)} < a_{(a)} < a_{(c)}$. 3) $\mathcal{E}_p \simeq$

$\frac{1}{2} K \left(\theta^2 \left(1 - \frac{a}{2} \right) + \frac{a\theta^4}{24} \right) + cte$. 5) $\omega_0 = \sqrt{\frac{K}{J} - \frac{mg\ell}{J}}$ et $\omega_1 = \sqrt{\frac{mg\ell}{J}}$. 6)

$\frac{1}{\omega_0} \frac{d\omega_0}{dg} = -\frac{2m\ell J^2}{K - mg\ell}$ et $\frac{1}{\omega_1} \frac{d\omega_1}{dg} = -\frac{1}{2g}$. 7) $a > 2$ pour un adulte. ⑥ 1)

$\mathcal{M}_{\Delta_2}(\vec{P}) > 0$ et $\mathcal{M}_{\Delta_1}(\vec{P}) > 0$ ssi $\alpha \geq \arctan(\ell/h)$. 2) Nul. 3) $\dot{\omega} > 0$. 4) $\dot{\omega} > 0$ ssi $\alpha \geq \arctan(\ell/h)$. 5) $Fh \geq \frac{mga}{2}$. 6) $W(\vec{F}) = \frac{mga}{2} (\cos(\theta) + \sin(\theta) - 1)$ et

$W_{min}(\vec{F}) = \frac{mga}{2} (\sqrt{2} - 1)$. 7) $F > \mu mg$. 8) $W_{min}(\vec{F}) = \mu mga$. 9) Roulement plus facile si $\mu > 1/2$ et moins coûteux si $\mu > \frac{\sqrt{2} - 1}{2}$. ⑦ 1) $\omega_1 R_1 = -\omega_2 R_2$. 2) $\ddot{z} \left(m + \frac{J_2}{R_2^2} + \frac{J_1 N_2}{N_1 R_1 R_2} \right) = \frac{FD N_2}{N_1 R_2} - mg$. 3) $F_0 = \frac{mg R_1}{D}$. 4) $\mathcal{P}(\vec{F}) = -mg R_1 \omega_1$, $\mathcal{P}(\vec{P}) = -mg R_2 \omega_2$ et $0 = \mathcal{P}(\vec{F}) + \mathcal{P}(\vec{P})$. 5) $R_{1,max} = \frac{F_{max} D}{mg} = 6,4$ cm.